Inducción Matemática y Buen Orden

Isaac Meza

Sabemos que el *Principio de Inducción* (PI) es equivalente al *Principio del Buen Orden* (BO). Así, toda proposición que puede ser demostrada con PI puede ser demostrada con BO y viceversa. Sin embargo, puede ser que la demostración con BO sea más elaborada que una demostración con inducción; o viceversa. Es la práctica la que nos ayudará a identificar qué demostración es más adecuada.

El esquema de demostración por inducción es el siguiente:

Problema: Demuestra que $\forall n \geq 4 \ \ P(n)$ se satisface.

Proof.

1. [Caso Base] Demuestra que la proposición es válida para $n = 4$.
2. [Hipótesis de Inducción] Supongamos que el resultado es cierto para UNA $n \geq 4$, esto es, $P(n)$ se cumple.
3. [Paso Inductivo] A partir del caso n (O de los casos $4, 5, \ldots, , n$ Inducción Modificada) prueba que se cumple el caso $n + 1$. SIEMPRE utiliza la hipótesis de inducción.
4. [Conclusión] $\forall n \geq 4, P(n)$ se satisface.

□

Mientras que el esquema de demostración utilizando BO es el siguiente:

Problema: Demuestra que $\forall n \geq 4 \ \ P(n)$ se satisface.

Proof.

1. Define el conjunto C de contraejemplos:

$$C := \{n \geq 4 | P(n) \text{ no se cumple}\}$$

2. Supongamos que C es no vacío, y se intentará llegar a una contradicción.

3. Por el **Principio del Buen Orden**, existe un menor elemento $c \in C$

4. Llega a una contradicción. Usualmente la contradicción será que existe un elemento menor a c y que pertenece a C.

5. Concluye que C tiene que ser el vacío, y por lo tanto que la proposición es verdadera

□

Ejemplo 1 Demuestra que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

[Inducción]

Proof. Procedemos por inducción sobre n.

[Base de Inducción] Para $n = 1$ es inmediato puesto que

$$1 = \frac{1(2)}{2} = 1$$

[Hipótesis de inducción] Supongamos que (1) se satisface para una $n \geq 1$; i.e.

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

[Paso inductivo] Queremos demostrar que

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} j &= \sum_{j=1}^{n} j + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \ldots\ldots \text{[Por Hipótesis de inducción]} \\
&= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Que es precisamente lo que queríamos demostrar.
Conclusión: (1) se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

[Buen Orden]

Proof. Sea $C = \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=1}^{n} j \neq \frac{n(n+1)}{2}\}$. Supongamos que C es no vació; por el Principio del Buen Orden C tiene un elemento mínimo, llamémosle c. Nótese que $c \neq 1$ porque claramente $1 \in C$. Luego, todo $n < c$ satisface (1) (¿por qué?); en particular $c-1$ cumple con (1), así pues

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{c-1} j = \frac{(c-1)(c)}{2} \\
\Rightarrow &\sum_{j=1}^{c-1} j + c = \frac{(c-1)(c)}{2} + c = \frac{c(c+1)}{2}
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción (¿por qué?). Luego, C es vacío, por lo que (1) se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

El siguiente resultado es un ejemplo clásico que se demuestra con BO.

Theorem 1. *Sea $a \in \mathbb{N}$ un número compuesto. Demuestra que existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \mid a$; dónde $\mathbb{P}$ es el conjunto de los primos.*

Proof. Sea $C_a = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1 \text{ y } n \mid a\}$, claramente C es no vacío (porque?). Por el Principio del Buen Orden C_a tiene un elemento mínimo, llamémosle p.

Afirmamos que $p \in \mathbb{P}$.

Si $p \notin \mathbb{P}$ consideremos $C_p = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1 \text{ y } n \mid p\}$, bajo el mismo argumento sea q el elemento mínimo de C_p y claramente $q \leq p$ (¿por qué?) . Si $q < p$ (¿qué pasa si $q = p$?) , $q \mid p$, $p \mid a$ por lo que $q \mid a$ lo que contradice a p como elemento mínimo y luego $p \in \mathbb{P}$. $\square$

Corollary 2. *Todo número $n \in \mathbb{N}$ puede ser factorizado como producto de primos.*

Ejercicio 1 Demuestra el corolario anterior.

Ejercicio 2 Utilizando inducción, demuestra el corolario anterior.

Ejercicio 3 Encuentra el error en la siguiente demostración.

$\forall n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $n = n + 1$.

Supongamos que la proposición es cierta para n. Queremos probar que $n + 1 = n + 2$.

$$\begin{aligned} n + 1 &= (n + 1) + 1 \quad \ldots\ldots \text{[Por Hipótesis de Inducción]} \\ &= n + 2 \end{aligned}$$

Por lo que el resultado es válido para todo natural.